

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος	xi
Εισαγωγή	xiii
Αναφορές	xix

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΟΥ ΝΟΕΡΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ	1
1.1. Διευκρίνιση όρων και εννοιών	1
1.1.1. Ορίζοντας το νοερό υπολογισμό και την εκτίμηση	1
1.1.2. Γιατί είναι σημαντικοί οι νοεροί υπολογισμοί και οι εκτιμήσεις;	3
1.1.3. Οι στρατηγικές στους νοερούς υπολογισμούς και τις εκτιμήσεις	4
1.1.4. Οι γραπτοί αλγόριθμοι και οι διαφορές τους με τις νοερές στρατηγικές	7
1.1.5. Αποτελεσματικότητα, ευελιξία και προσαρμοστικότητα των στρατηγικών	11
1.1.6. Προσαρμοστική ειδίκευση και ειδίκευση ρουτίνας	12
1.1.7. Τα τρία είδη μεταβλητών που επηρεάζουν και προσδιορίζουν την ευελιξία/προσαρμοστικότητα	13
1.1.7.1. Μεταβλητές του έργου ή τα χαρακτηριστικά της πράξης	13
1.1.7.2. Μεταβλητές του υποκειμένου ή ταχύτητα και αποτελεσματικότητα	15
1.1.7.3. Μεταβλητές του πλαισίου	19
1.1.8. Ο Αριθμητισμός οι νοεροί υπολογισμοί και η εκτίμηση	22
1.2. Αίσθηση του αριθμού, νοεροί υπολογισμοί και εκτίμηση	25
1.2.1. Τι είναι η αίσθηση του αριθμού;	25
1.2.1.1. Ποια είναι τα συστατικά της αίσθησης του αριθμού;	26
1.2.2. Η εννοιολογική κατανόηση και οι διαδικαστικές δεξιότητες στους νοερούς υπολογισμούς	27
1.2.3. Αίσθηση του αριθμού, οι νοεροί υπολογισμοί και η εκτίμηση	29
1.2.3.1. Η αίσθηση του αριθμού και οι νοεροί υπολογισμοί	29
1.2.3.2. Η αίσθηση του αριθμού και η εκτίμηση	31
1.3. Η ανάπτυξη των αριθμητικών ικανοτήτων, οι άτυπες γνώσεις και στρατηγικές των μαθητών	33
1.3.1. Η εμφάνιση και ανάπτυξη των πρώτων αριθμητικών ικανοτήτων	33
1.3.1.1. Πληθικότητα και απαρίθμηση	34
1.3.1.2. Πολλαπλασιασμός, διαίρεση και ρητοί αριθμοί	37
1.4. Νοερή Αριθμογραμμή	39

1.4.1. Η νοερή ή εσωτερική αριθμογραμμή και η εξωτερική αριθμογραμμή	40
1.4.2. Η νοερή αριθμογραμμή ως στοιχείο σε θεωρητικές αναλύσεις	41
1.4.3. Οι τρεις δείκτες συμπεριφοράς στην νοερή αριθμογραμμή	42
1.4.3.1. Η επίδραση της αριθμητικής απόστασης (Numerical Distance Effect, NDE)	43
1.4.3.2. Η επίδραση της χωρικής-αριθμητικής σχέσης (SNARC effect)	44
1.4.3.3. Η επίδραση του μεγέθους (size effect)	45
1.4.4. Εκπαιδευτικές παρεμβάσεις με παιχνίδια για τη νοερή αριθμογραμμή	46
1.4.4.1. Γραμμικά επιτραπέζια παιχνίδια για τη νοερή αριθμογραμμή	46
1.4.4.2. Παιχνίδια στον υπολογιστή για τη νοερή αριθμογραμμή	48
1.4.4.3. Παιχνίδια στον υπολογιστή για τη νοερή αριθμογραμμή με ενσώματα χαρακτηριστικά	50
Αναφορές	53

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΝΟΕΡΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ	69
2.1. Θεωρητικές αντιλήψεις για τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών, της ευελιξίας και της προσαρμοστικότητας	69
2.1.1. Θεωρητικές αντιλήψεις για τη διδασκαλία της αριθμητικής	69
2.1.2. Έμμεση και Άμεση διδασκαλία των στρατηγικών	72
2.1.2.1. Θεωρητικές αντιλήψεις για τη διδασκαλία των στρατηγικών	73
2.1.2.2. Έμμεση διδασκαλία των στρατηγικών	75
2.1.2.3. Άμεση διδασκαλία των στρατηγικών	76
2.1.3. Θεωρητικές προσεγγίσεις για τη διδασκαλία και μάθηση της προσαρμοστικής χρήσης των στρατηγικών	78
2.1.4. Η διδασκαλία της ευελιξίας και της ειδίκευσης μέσω προσαρμογής	81
2.1.4.1. Με ποια σειρά να εξελιχθεί η διδασκαλία;	81
2.1.4.2. Σε ποιους να απευθύνεται η διδασκαλία;	82
2.1.4.3. Πώς να πραγματοποιείται η διδασκαλία;	83
2.1.5. Διάφορες εμπειρικές έρευνες για την ευέλικτη και προσαρμοστική χρήση των στρατηγικών	85
2.1.5.1. Διεμπλεκόμενη και αποκλεισμένη πρακτική	89
2.2. Ιστορική αναδρομή στη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών στην ελληνική εκπαίδευση	94
2.2.1. Χρήση των νοερών υπολογισμών στην πρώτη περίοδο των παραδοσιακών μαθηματικών	94
2.2.1.1. Περίοδος των παραδοσιακών Μαθηματικών	94

2.2.1.2. Οι νοερόι υπολογισμοί την πρώτη περίοδο των παραδοσιακών μαθηματικών	94
2.2.2. Περιορισμός των νοερών υπολογισμών κατά την περίοδο των παραδοσιακών μαθηματικών και των Μοντέρνων Μαθηματικών	98
2.2.2.1. Οι νοερόι υπολογισμοί τη δεύτερη περίοδο των παραδοσιακών μαθηματικών	98
2.2.2.2. Περίοδος των Αναλυτικών προγραμμάτων 1982-85. Επίδραση των Μοντέρνων Μαθηματικών	99
2.2.3. Εμφάνιση των νοερών υπολογισμών στα προγράμματα Δ.Ε.Π.Σ και τα νέα βιβλία το 2006	101
2.3. Παρουσίαση του προγράμματος διδασκαλίας της Ολλανδίας	104
2.3.1. Ρεαλιστικά Μαθηματικά της Ολλανδίας και νοερόι υπολογισμοί	104
2.3.2. Η εισαγωγή και η εξέλιξη των στρατηγικών	106
2.3.3. Η αρίθμηση και η στρατηγική N10 εναντίον των διαδικασιών θεσιακής αξίας και της στρατηγικής 1010	108
2.3.4. Προοδευτική μαθηματοποίηση και κενή αριθμητική γραμμή	109
2.3.5. Οι υπολογισμοί σε στήλες	117
2.4. Αξιολόγηση της διδασκαλίας στην Ελλάδα των νοερών υπολογισμών στις πράξεις με φυσικούς αριθμούς	119
2.4.1. Προτάσεις βελτίωσης στο ελληνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα και σχολικά βιβλία	120
Αναφορές	122

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΝΟΕΡΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ: ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΙΣ	133
3.1. Στρατηγικές πρόσθεσης αφαίρεσης με αριθμούς μέχρι το 20	133
3.1.1. 1 ^ο επίπεδο: Στρατηγικές με υλικά ή αισθητοποίησης των αριθμών	135
3.1.1.1. Πρόσθεση	135
3.1.1.2. Αφαίρεση	136
3.1.2. 2 ^ο επίπεδο: Στρατηγικές αρίθμησης	137
3.1.2.1. Πρόσθεση	137
3.1.2.2. Αφαίρεση.....	138
3.1.2.3. Η χρήση των δακτύλων	139
3.1.3. 3 ^ο επίπεδο: Στρατηγικές ανάκλησης ή κατασκευαστικές στρατηγικές	140
3.1.3.1. Πρόσθεση	141
3.1.3.2. Αφαίρεση	141
3.1.4. Η στρατηγική υπέρβασης της δεκάδας ή πέρασμα από το 10	142

3.1.4.1. Η κενή αριθμογραμμή για την αναπαράσταση της στρατηγικής του περάσματος από το 10	143
3.2. Αποτελέσματα ερευνών στις προσθέσεις και αφαιρέσεις με αριθμούς μέχρι το 20	145
3.2.1. Η Ανάπτυξη στις στρατηγικές αρίθμησης	146
3.2.1.1. Από τη στρατηγική ‘απαρίθμηση όλων’ στις στρατηγικές ‘αρίθμησης από’	146
3.2.1.2. Από τις στρατηγικές αρίθμησης στις στρατηγικές ανάκλησης αριθμητικών γεγονότων	147
3.2.2. Τα χαρακτηριστικά των στρατηγικών σε προσθέσεις και αφαιρέσεις με αριθμούς μέχρι το 20	150
3.2.2.1. Η χρήση ποικίλων στρατηγικών	151
3.2.2.2. Προσαρμοστική επιλογή των στρατηγικών	151
3.2.2.3. Η ανακάλυψη και η γενίκευση των καινούργιων στρατηγικών	152
3.2.2.3.1. Η ανακάλυψη από τα παιδιά της στρατηγικής min	153
3.2.3. Τα αποτελέσματα έρευνας, σε μονοψήφιες προσθέσεις και αφαιρέσεις, της σχολής των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής	155
3.2.3.1. Τα βασικά χαρακτηριστικά της πειραματικής διδασκαλίας των νοερών υπολογισμών	156
3.3. Στρατηγικές πρόσθεσης αφαίρεσης με αριθμούς από το 20 μέχρι το 100	163
3.3.1. Κατηγοριοποίηση των στρατηγικών πρόσθεσης και αφαίρεσης με αριθμούς από το 20 μέχρι το 100	163
3.3.2. Άλλοι τρόποι κατηγοριοποίησης των στρατηγικών	170
3.4. Αφαίρεση με πρόσθεση	173
3.5. Αποτελέσματα ερευνών στις προσθέσεις και αφαιρέσεις διψήφιων και πολυψήφιων αριθμών της σχολής των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής ..	176
3.5.1. Αποτελέσματα από ένα πρόγραμμα εξ’ αποστάσεως επιμόρφωσης δασκάλων και πειραματικής εφαρμογής των νοερών υπολογισμών	176
3.5.1.1. Παρουσίαση δεδομένων από το αρχικό και το τελικό ερωτηματολόγιο στη Γ’ τάξη	180
3.5.1.2. Παρουσίαση δεδομένων από το αρχικό και το τελικό ερωτηματολόγιο στη Δ’ τάξη	182
3.5.1.3. Παρουσίαση δεδομένων από το αρχικό και το τελικό ερωτηματολόγιο στην Ε’ και Στ’ τάξη	184
3.5.2. Αποτελέσματα έρευνας στη χρήση στρατηγικών και την ευελιξία σε μαθητές της Γ’ τάξης	187
3.5.3. Αποτελέσματα έρευνας για την ευελιξία στη χρήση στρατηγικών μαθητών της Στ’ τάξης	192
Αναφορές	196

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΝΟΕΡΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ: ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ	203
4.1. Η μάθηση της προπαίδειας	203
4.1.1. Οι μηχανισμοί της μνήμης και η μάθηση της προπαίδειας	204
4.1.2. Οι μηχανισμοί που καθοδηγούν την ανάπτυξη των στρατηγικών στην προπαίδεια	206
4.1.3. Οι στρατηγικές υπολογισμού στην προπαίδεια	208
4.1.4. Διαφοροποιήσεις στη χρήση των στρατηγικών και παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση στην προπαίδεια	211
4.1.4.1. Διαφοροποίηση στη χρήση των στρατηγικών κατά τη διάρκεια του χρόνου	211
4.1.4.2. Διαφοροποίηση στη χρήση των στρατηγικών σύμφωνα με τους παράγοντες του γινομένου	213
4.1.5. Η διδασκαλία της προπαίδειας	214
4.1.5.1. Διδακτικές παρατηρήσεις και οδηγίες για τη διδασκαλία της προπαίδειας	218
4.2. Η διαίρεση	221
4.2.1. Σημασιολογική δομή προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης	221
4.2.2. Διαιρέσεις μερισμού και μέτρησης	222
4.2.3. Αρχικές γνώσεις των μαθητών στη διαίρεση	223
4.2.4. Κατηγοριοποίηση των στρατηγικών στις απλές διαιρέσεις	224
4.2.5. Έρευνες σε απλές πράξεις διαίρεσης	226
4.3. Πολυψήφιοι πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις	229
4.3.1. Κατηγοριοποίηση των στρατηγικών σε πολυψήφιους πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις	229
4.3.2. Αποτελέσματα ερευνών σε πολυψήφιους πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις της σχολής των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής	233
4.3.2.1. Έρευνα στις άτυπες στρατηγικές πριν τη διδασκαλία του αλγόριθμου	233
4.3.2.2. Έρευνα στις στρατηγικές σε μαθητές Δημοτικού μετά τη διδασκαλία	237
4.3.2.3. Έρευνες στις στρατηγικές σε μαθητές Γυμνασίου	242
4.4. Ο Ελληνικός πολλαπλασιασμός. Εισαγωγή στον γραπτό αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού	246
4.4.1. Ιστορικοί αλγόριθμοι του πολλαπλασιασμού που χρησιμοποιούνται στην εκπαίδευση	247
4.4.2. Ιστορική προέλευση του Ελληνικού πολλαπλασιασμού	249
4.4.3. Εφαρμογή του Ελληνικού πολλαπλασιασμού στην εκπαίδευση	253
Αναφορές	255

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΝΟΕΡΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΜΕ ΡΗΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ	263
5.1. Οι ρητοί αριθμοί	263
5.1.1. Τι είναι οι ρητοί αριθμοί;	264
5.1.2. Οι δυσκολίες στους ρητούς αριθμούς	266
5.2. Στρατηγικές στους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς	270
5.2.1. Οι στρατηγικές για τη σύγκριση κλασμάτων	271
5.2.2. Παραδείγματα διαδικαστικών και εννοιολογικών στρατηγικών	272
5.2.3. Στρατηγικές που χρησιμοποιούνται στους νοερούς υπολογισμούς με κλάσματα	272
5.2.4. Στρατηγικές που χρησιμοποιούνται σε νοερούς υπολογισμούς με δεκαδικούς	274
5.2.5. Στρατηγικές που χρησιμοποιούνται σε νοερούς υπολογισμούς με ποσοστά	274
5.3. Αποτελέσματα ερευνών στους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς	276
5.3.1. Έρευνες στη νοερή σύγκριση των κλασμάτων	277
5.3.2. Αποτελέσματα από το πρόγραμμα εξ'αποστάσεως επιμόρφωσης δασκάλων και πειραματικής εφαρμογής των νοερών υπολογισμών	279
5.3.2.1. Παρουσίαση δεδομένων από το αρχικό και το τελικό ερωτηματολόγιο στη Δ' τάξη	279
5.3.2.2. Παρουσίαση δεδομένων από το αρχικό και το τελικό ερωτηματολόγιο στις Ε' και Στ' τάξεις	281
5.3.3. Αποτελέσματα έρευνας σε μαθητές Ε' και Στ' τάξης του Δημοτικού Σχολείου	284
5.3.4. Οι ικανότητες των μαθητών στην εναλλαγή των διαφορετικών συμβολικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών	287
5.3.5. Αποτελέσματα ερευνών σε εκπαιδευτικούς στους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς	292
5.3.6. Εκπαιδευτικές παρεμβάσεις στην αίσθηση του αριθμού	295
Αναφορές	298

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΚΤΙΜΗΣΗ	307
6.1. Εισαγωγή	307
6.1.1. Τα διάφορα είδη της εκτίμησης	309
6.1.2. Εκτίμηση και προσέγγιση	311
6.2. Η υπολογιστική εκτίμηση	313

6.2.1. Οι διάφορες στρατηγικές στην υπολογιστική εκτίμηση	313
6.2.2. Ταξινόμηση των στρατηγικών. Ιεραρχική ταξινόμηση, το μοντέλο IHMCES	316
6.2.2.1. Το Ολοκληρωμένο Ιεραρχικό Μοντέλο Στρατηγικών Υπολογιστικής Εκτίμησης (IHMCES)	318
6.2.2.2. Η έρευνα σε μαθητές της Ε΄ τάξης ως προς τη χρήση των στρατηγικών της υπολογιστικής εκτίμησης	326
6.2.3. Μεταβλητές ή παράγοντες που επηρεάζουν την υπολογιστική εκτίμηση	327
6.2.3.1. Μεταβλητές του υποκειμένου	328
6.2.3.2. Μεταβλητές του έργου	329
6.2.3.3. Μεταβλητές του πλαισίου	331
6.2.4. Τα αποτελέσματα των ερευνών στην υπολογιστική εκτίμηση	333
6.2.4.1. Έρευνες για τις ικανότητες των μαθητών στην υπολογιστική εκτίμηση	333
6.2.4.1.1. Συμπεριφορές μαθητών Ε΄ και Στ΄ τάξης στους κατ΄ εκτίμηση υπολογισμούς	334
6.2.4.2. Έρευνες σε εκπαιδευτικούς σχετικά με την υπολογιστική εκτίμηση	339
6.2.4.2.1. Οι γνώσεις εν ενεργεία εκπαιδευτικών στην υπολογιστική εκτίμηση	341
6.2.4.2.2. Έρευνα σε Έλληνες μαθηματικούς σχετικά με την υπολογιστική εκτίμηση	343
6.2.5. Εκπαίδευση και εκπαιδευτικές παρεμβάσεις στην υπολογιστική εκτίμηση	347
6.2.5.1. Διδακτικές παρεμβάσεις σε μαθητές	349
6.2.5.2. Διδακτικές παρεμβάσεις σε εκπαιδευτικούς	350
6.3. Η εκτίμηση μέτρησης	354
6.3.1. Διαφορετικές καταστάσεις για την αξιολόγηση των ικανοτήτων της εκτίμησης μέτρησης	355
6.3.2. Ένα πλαίσιο της διαδικασίας της εκτίμησης μέτρησης	356
6.3.3. Οι στρατηγικές στην εκτίμηση μέτρησης	357
6.3.4. Έρευνες στην εκτίμηση μέτρησης	360
6.4. Η εκτίμηση αριθμογραμμής	365
6.4.1. Η ανάπτυξη των ικανοτήτων και η αναπαραστατική αλλαγή από λογαριθμική σε γραμμική	365
6.4.2. Η σχέση της εκτίμησης σε αριθμογραμμή με την επίδοση στα μαθηματικά	367
6.4.2.1. Θεωρητικές ερμηνείες αυτής της σχέσης	368
6.4.2.2. Τα αποτελέσματα των ερευνών	369
6.4.3. Οι στρατηγικές εκτίμησης σε αριθμογραμμή	371

6.4.4. Εκπαιδευτικές παρεμβάσεις	374
6.5. Η εκτίμηση πλήθους	376
6.5.1. Οι στρατηγικές στην εκτίμησης πλήθους	378
6.5.2. Εκπαίδευση και εκτίμηση πλήθους	381
Αναφορές	385

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΜΑΘΗΣΙΑΚΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΝΟΕΡΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ	399
7.1. Δυσκολίες στα μαθηματικά και ατομικές διαφορές. Προσδιορισμός των όρων ..	399
7.1.1. Σχέση της δυσαριθμησίας με τη δυσλεξία	403
7.2. Πώς λειτουργεί η μνήμη;	404
7.2.1. Η εργαζόμενη μνήμη	405
7.2.2. Διάφορες λειτουργίες της εργαζόμενης μνήμης και αντίστοιχες αριθμητικές ικανότητες. Διαφορές με βάση την ηλικία	407
7.3. Εγκέφαλος, αριθμητική και οι νοεροί υπολογισμοί	409
7.4. Αριθμητικά γεγονότα και μνήμη	412
7.5. Η χρήση των στρατηγικών στους νοερούς υπολογισμούς από μαθητές με δυσκολίες στα μαθηματικά	415
7.6. Διδακτικές παρεμβάσεις για παιδιά με δυσκολίες στα μαθηματικά και ειδικά στους νοερούς υπολογισμούς	418
7.6.1. Έρευνες για διδακτικές παρεμβάσεις στους νοερούς υπολογισμούς	421
7.6.1.1. Έρευνες με άμεση διδασκαλία	422
7.6.1.2. Έρευνες με διδασκαλία γνωστικής στρατηγικής	423
7.6.2. Μνημονικές στρατηγικές	424
7.6.2.1. Η χρήση των μνημονικών στρατηγικών στη διδασκαλία της προπαίδειας	427
Αναφορές	429
Γλωσσάρι όρων στους νοερούς υπολογισμούς	438